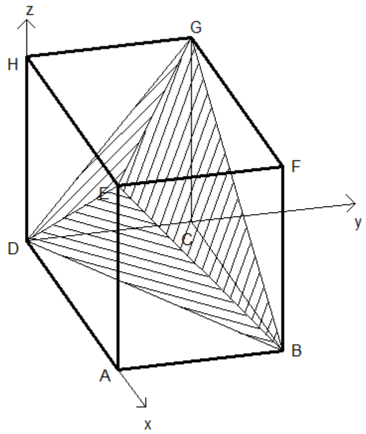
Komplexe Übung zu Ebenen und Geraden
Erster Teil – Aufgaben

Die Übung basiert auf der Idee einer Aufgabe in Bigalke/Köhler : Mathematik 13.1 Grundkurs (S.78, Aufgabe 6), die hier stark erweitert wurde.



Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 5 in einem kartesischen Koordinatensystem entsprechend der Abbildung.

Die Punkte B, D, E und G sind die Ecken eines Tetraeders.

Aufwärmen

a.) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 durch die Punkte B, C, F und G in der PRF.

b.) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in der PNF. Wandeln Sie nicht die PRF aus Teil a.) um, sondern bestimmen Sie die PNF direkt.

za.) und zb.) Wählen Sie selbst weitere Würfelseiten aus, etwa die Seite, die der Ebene E_1 gegenüberliegt, oder die Oberseite und die Vorderseite. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Ebenen in der PRF und der PNF.

Nur Geraden

c.) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_1 , die durch den Punkt E geht und die senkrecht auf den Geraden durch $\overline{BE}$ und $\overline{EG}$ steht.

d.) Geben Sie die Gleichung einer Geraden g_2 an, die windschief zur Geraden g_3 durch $\overline{BG}$ ist, und beweisen Sie diese Eigenschaft von g_2 .

zc.) Wählen Sie einen Eckpunkt des Tetraeders, und bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden, die durch diesen Punkt geht, und die senkrecht auf den beiden Tetraederseiten steht, die von diesem Eckpunkt ausgehen.

Umwandeln

e.) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E_2 durch die Punkte B, E und G in der PRF.

f.) Wandeln Sie die Gleichung der Ebene E_2 von der PRF in die PNF um.

g.) Wandeln Sie die Gleichung der Ebene E_2 in die KF um.

h.) Wandeln Sie die Gleichung der Ebene E_2 in die HF um.

ze.) zf.) zg.) und zh.) Wählen Sie selbst eine Seite des Tetraeders (er hat 4 davon). Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E_{21} durch die 3 Punkte der Tetraederseite in der PRF. Wandeln Sie sie in die PNF, die KF und die HF um.

i.) Gegeben ist der Punkt $P(2{,}5/2{,}5/2{,}5)$ und der Vektor $\vec{n}_3=\begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix}$. Beschreiben Sie die Lage desjenigen Repräsentanten von $\vec{n}_3$, der durch P geht, anschaulich. Ein Wort genügt.

j.) Geben Sie die Gleichung der Ebene E_3 , die durch P geht und deren Normalenvektor $\vec{n}_3$ ist, in der PNF an.

k.) Wandeln Sie die Gleichung der Ebene E_3 in die PRF um.

l.) Geben Sie an, welche Eckpunkte des Würfels auf E_3 liegen. Begründen Sie Ihre Angaben.

zi.) zj.) und zk.) Wählen Sie einen Vektor $\vec{n}_4$, der in Bezug auf seine Lage im Würfel zu $\vec{n}_3$ vergleichbar ist (es gibt 3 solche). Geben Sie die Gleichung der Ebene E_4 , die durch P geht und $\vec{n}_4$ als Normalenvektor hat, in der PNF an, und wandeln Sie sie in die PRF um.

Geraden und Ebenen

m.) Untersuchen Sie die Gerade g_4 durch die Punkte A und D und die Ebene E_2 auf gemeinsame Punkte.

zm.) Untersuchen Sie die Ebene E_{21} und eine der Würfelkanten (sie sollte die Ebene natürlich nicht in einem Eckpunkt des Würfels schneiden) auf gemeinsame Punkte.

n.) Untersuchen Sie die Gerade g_5 durch die Punkte C und G und die Ebene E_3 auf gemeinsame Punkte.

o.) Untersuchen Sie die Gerade g_6 durch die Punkte B und D und die Ebene E_3 auf gemeinsame Punkte.

zn.) zo.) Untersuchen Sie die Ebene E_4 und von Ihnen selbst gewählte Kanten des Würfels und des Tetraeders auf gemeinsame Punkte.

p.) Geben Sie eine Gerade g_7 an, die durch den Punkt A geht und mit E_2 keinen gemeinsamen Punkt hat, und beweisen Sie diese Eigenschaft von g_7 .

q.) Geben Sie eine Gerade g_8 an, die durch den Punkt A geht und die senkrecht auf E_2 steht, und beweisen Sie diese Eigenschaft von g_8 .

r.) Geben Sie eine Gerade g_9 an, die vollständig in E_2 liegt.

zp.) zq.) zr.) Geben Sie Geraden an, die mit E_3 oder E_4 keinen gemeinsamen Punkt haben, die senkrecht zu diesen Ebenen stehen oder vollständig darin liegen.

s.) Die Ebene E_5 geht durch den Punkt F und enthält die Gerade g_1 vollständig. Bestimmen Sie die Gleichung von E_5 .

t.) Die Ebene E_6 geht durch den Punkt G und enthält die Gerade g_6 vollständig. Bestimmen Sie die Gleichung von E_6 .

zs.) zt.) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die durch H geht und die Strecke $\overline{EC}$ vollständig enthält. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die durch E geht und die Strecke $\overline{BG}$ vollständig enthält.

Nur Ebenen

u.) Stellen Sie die Gleichung der Ebene E_7 in der PRF auf, die durch den Punkt C geht und zur Ebene E_2 parallel ist, und beweisen Sie diese Eigenschaft von E_7 .

v.) Stellen Sie die Gleichung einer Ebene E_8 in der PNF auf, die durch den Punkt C geht und zur Ebene E_2 orthogonal ist, und beweisen Sie diese Eigenschaft von E_8 . Wie viele solcher Ebenen gibt es ?

w.) Untersuchen Sie die Ebenen E_2 und E_3 auf gemeinsame Punkte.
w1.) Benutzen Sie für beide Ebenen die PRF.
w2.) Benutzen Sie für beide Ebenen die PNF.
w3.) Benutzen Sie für eine Ebene die PRF, für die andere die PNF.

x.) Untersuchen Sie die Ebenen E_2 und E_8 auf gemeinsame Punkte.

y.) Untersuchen Sie die Ebene E_2 und die Ebene E_9 durch die Punkte B, D, H und F auf gemeinsame Punkte.

z.) Untersuchen Sie die folgenden Ebenen auf gemeinsame Punkte. Achten Sie darauf, dass Sie alle 3 Fälle üben : Beide Ebenen sind in der PRF gegeben, beide in der PNF, oder eine so, eine so.
z1.) E_2 und E_7
z2.) E_3 und E_7
z3.) E_5 und E_8
z4.) E_6 und E_8
z5.) E_1 und E_3
z6.) E_8 und E_9

zw.) zx.) zy.) zz.) Untersuchen Sie die Ebene E_4 mit allen bisher berechneten Ebenen auf gemeinsame Punkte, und auch mit einigen Seitenflächen des Würfels und einigen Tetraederflächen.

Spuren

⇉.) Bestimmen Sie die Spurgeraden der Ebene E_2 .

z⇉.) Bestimmen Sie die Spurgeraden der Ebene E_3 .

⇈.) Bestimmen Sie die Spurpunkte der folgenden Geraden.
⇈1.) Gerade durch die Mittelpunkte der Tetraederseiten BE und BG .
⇈2.) Gerade g_5 .
⇈3.) Gerade g_x . Sie ist die Lösung aus Aufgabenteil x.) .

Winkel

ä.) Bestimmen Sie die Winkel zwischen den folgenden Geraden.
ä1.) Winkel α zwischen 2 Kanten des Tetraeders (die sich schneiden)
ä2.) Winkel β zwischen einer Tetraederkante und einer Raumdiagonale des Würfels, die die Tetraederkante schneidet.
ä3.) Winkel γ zwischen einer Würfelkante und einer Raumdiagonale des Würfels, die die Würfelkante schneidet.

zä.) Bestimmen Sie die Winkel zwischen der Geraden g_1 und den Geraden durch die Punkte $\overline{EH}$, $\overline{EG}$ und $\overline{EC}$.

ö.) Bestimmen Sie die Winkel zwischen folgenden Geraden und Ebenen.
ö1.) Winkel δ zwischen der Geraden g_1 und der Ebene E_2 .
ö2.) Winkel ϵ zwischen der Geraden g_1 und der Ebene E_6 .

zö.) Bestimmen Sie die Winkel zwischen der Geraden g_1 und den Ebenen E_1 , E_3 und E_8 .

ü.) Bestimmen Sie die Winkel zwischen folgenden Geraden und Ebenen.
ü1.) Winkel η (eta) zwischen der Geraden g_6 und der Ebene E_2 .
ü2.) Winkel χ (chi) zwischen der Geraden g_6 und der Ebene E_3 .

ß.) Bestimmen Sie die Winkel zwischen den folgenden Ebenen.
ß1.) Winkel κ (kappa) zwischen E_2 und E_3 .
ß2.) Winkel λ (lambda) zwischen E_2 und E_9 .
ß3.) Winkel μ (my) zwischen E_1 und E_3 .
ß4.) Winkel ν (ny) zwischen E_5 und E_9 .

zö.) zü.) zß.) Bestimmen Sie die Winkel zwischen der Ebene E_3 und 2 nichtparallelen Kanten des Würfels, 2 Kanten des Tetraeders, 2 nichtparallelen Flächen des Würfels und 2 Flächen des Tetraeders.

→.) →1.) Wie groß ist der Winkel zwischen 2 Tetraederkanten ?
→2.) Wie groß ist der Winkel zwischen der Kante und der Fläche des Tetraeders ?
→3.) Wie groß ist der Winkel zwischen 2 Tetraederflächen ?

Abstände

↑.) ↑1.) Bestimmen Sie den Abstand d_A des Punktes A von der Ebene E_2 .
↑2.) Bestimmen Sie den Abstand d_D des Punktes D von der Ebene E_2 .
↑3.) Gibt es einen Punkt des Würfels, der von E_2 größeren Abstand hat als D ?
hier noch dazu – wichtig – abstand tetraederecke zu gegenüberliegender tetraederfläche

z↑.) Bestimmen Sie die Abstände der Punkte H und F zu E_2 .
Bestimmen Sie die Abstände der Punkte D, E und F zu E_5 .

↓.) ↓1.) Geben Sie eine Gerade g_{10} an, die zu E_2 parallel ist, und bestimmen Sie den Abstand d_1 von g_{10} zu E_2 .
↓2.) Bestimmen Sie den Abstand d_2 der Schnittgeraden g_{11} der Ebenen E_2 und E_9 zur Ebene E_7 .
↓3.) Bestimmen Sie den Abstand d_3 der Geraden g_{12} durch die Punkte D und E zur Ebene E_1 .

←.) Bestimmen Sie den Abstand d_4 der Ebenen E_2 und E_7 .

↔.) Bestimmen Sie die folgenden Abstände zwischen einem Punkt und einer Geraden.
↔1.) Abstand d_5 zwischen Punkt E und der Geraden g_3 .
↔2.) Abstand d_6 zwischen Punkt E und der Raumdiagonalen durch D und F.
↔3.) Abstand d_7 zwischen Punkt G und der Geraden g_1 .
↔4.) Abstand d_8 zwischen Punkt B und der Geraden g_8 .
↔5.) Abstand d_9 zwischen Punkt E und der Geraden g_8 .
↔6.) Abstand d_{10} zwischen Punkt G und der Geraden g_8 .

↕.) Bestimmen Sie die Abstände folgender paralleler Geraden.
↕1.) Abstand d_{11} zwischen den Geraden g_1 und g_8 .
↕2.) Abstand d_{12} zwischen der Geraden g_3 und der Geraden durch A und H.
↕3.) Abstand d_{13} zwischen der Geraden g_8 und einer selbst gewählten, zu g_8 parallelen Geraden g_{13} .

⇆.) Bestimmen Sie die Abstände folgender windschiefer Geraden.

- ⇆1.) Abstand d_{14} zwischen 2 Kanten des Tetraeders (die sich nicht schneiden).
- ⇆2.) Abstand d_{15} zwischen einer Tetraederkante und einer Würfelkante, die die Tetraederkante nicht schneidet.
- ⇆3.) Abstand d_{16} zwischen einer Tetraederkante und einer Raumdiagonale des Würfels, die die Tetraederkante nicht schneidet.
- ⇆4.) Abstand d_{17} zwischen einer Würfelkante und einer Raumdiagonale des Würfels, die sich nicht schneiden.

z⇆.) Bestimmen Sie die Abstände der Geraden g_1 zu einer Tetraederkante, einer Würfelkante und einer Raumdiagonale des Würfels.

Spezielles

⇃↾.) Bestimmen Sie eine Ebene E_{10} , für die gilt : Jeder Punkt von E_{10} hat denselben Abstand zu E_2 und der Ebene E_{11} durch die Punkte D, E und G.

↳.) Untersuchen Sie, ob die Ebene E_3 den Würfel halbiert.

Benutzen Sie für die nächsten Aufgaben die Methoden der Analytischen Geometrie.

↶.) Bestimmen Sie die Höhe des Tetraeders.

↪.) Bestimmen Sie die Oberfläche des Tetraeders.

↺.) Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders.

↻.) Der Schwerpunkt $S(x_s/y_s/z_s)$ des Tetraeders mit den Eckpunkten $P_1(x_1/y_1/z_1)$, $P_2(x_2/y_2/z_2)$, $P_3(x_3/y_3/z_3)$ und $P_4(x_4/y_4/z_4)$ hat die folgenden Koordinaten : $x_s=0{,}25(x_1+x_2+x_3+x_4)$, $y_s=0{,}25(y_1+y_2+y_3+y_4)$ und $z_s=0{,}25(z_1+z_2+z_3+z_4)$.

Das Methanmolekül ist so aufgebaut, dass sich im Schwerpunkt ein Kohlenstoffatom befindet und an den 4 Ecken je ein Wasserstoffatom. Das Kohlenstoffatom ist mit den Wasserstoffatomen durch gerade Bindungen verbunden. Bestimmen Sie den Winkel, den diese Bindungen miteinander bilden. Er heißt Tetraederwinkel.

Komplexe Übung zu Ebenen und Geraden
Zweiter Teil – Lösungen

Ihre Lösung ist anders als meine ? Das muss kein Problem sein. Jede Gerade und Ebene kann man auf unendlich viele Arten beschreiben. Oft gibt es viele Geraden oder Ebenen, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen.

a.) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b.) $E_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

c.) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

d.) klar

e.) $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\-5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}$

f.) $E_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

g.) $E_2: x + y + z = 10$

h.) $E_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

i.) Das Wort wird nicht verraten. Aber es hat 13 Buchstaben.

j.) $E_3: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix} = 0$

k.) $E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}$

l.) Sorry, keine. Rechnen Sie nicht endlos, sondern argumentieren Sie geschickt.

m.) $S(10/0/0)$ n.) $S(0/5/2{,}5)$ o.) $S(1{,}25/1{,}25/0)$

p.) $g_7: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\-5\end{pmatrix}$

q.) $g_8: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

r.) Nö

s.) $E_5: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

t.) $E_6: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$

u.) $E_7: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\-5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}$

v.) $E_8: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

w.) $g_w: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}25 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

x.) $g_x: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

y.) $g_y: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

z2.) $g_{z2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}75 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

z3.) $g_{z3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Der Richtungsvektor von g_{z3} ist identisch mit dem Normalenvektor von E_2. Wundert Sie das ?

z4.) $g_{z4}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

z5.) $g_{z5}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

z6.) Wenn Sie die Ergebnisse von x.) und y.) sehen, brauchen Sie nichts mehr zu rechnen, nur zu argumentieren.

⇉.) $g_{xz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $g_{yz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g_{xy}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

z⇉.) $g_{xy}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die anderen 2 sehen ähnlich aus.

⇈1.) $P_1(7{,}5/0/2{,}5)$ und $P_2(¿7{,}5/2{,}5)$. Keine weiteren Spurpunkte.

⇈2.) $P_1(0/5/0)$. Keine weiteren Spurpunkte.

⇈3.) $P_1(2{,}5/7{,}5/0)$, $P_2(-5/0/15)$ und $P_3(0/5/5)$.

ä1.) $\alpha = 60°$ ä2.) $\beta = 35{,}26°$ ä3.) $\gamma = 54{,}74°$

ö1.) $\delta = 90°$ ö2.) $\epsilon = 19{,}47°$ ü.) $\eta = \chi = 54{,}74°$

ß1.) $\kappa = 70{,}53°$ ß2.) $\lambda = 90°$ ß3.) $\mu = 54{,}74°$

ß4.) $\nu = 60°$

zö.) zü.) zß.) Die Winkel zwischen E_3 und den Würfelkanten betragen immer 35,26°, die Winkel zu den Teatraederkanten 0° oder 54,74° (je 3 mal), die Winkel zu den Würfelflächen immer 54,74°, und die Winkel zu den Tetraederflächen 0° (einmal) oder 70,54° (3 mal).

→.) Sie haben das hoffentlich nicht nochmal ausgerechnet. Es ist alles schon da.

↑1.) $d_A = 2.89$ ↑2.) $d_D = 5{,}77$ ↑3.) Nein. Argumentiere effizient.

↓1.) g_{10} hat die Form $g_{10}: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1-a \end{pmatrix}$. Können Sie das begründen ?

Nun folgt $d_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (a_x + a_y - 10)$.

↓2.) $d_2 = 2{,}89$ ↓3.) Haben Sie hier etwa gerechnet ?

←.) $d_4 = 2{,}89$ ↔1.) $d_5 = 6{,}12$ ↔2.) $d_6 = 4{,}08$

↔3.) $d_7 = 7{,}07$ ↔4.) ↔5.) $d_8 = d_9 = 4{,}08$ ↔6.) $d_{10} = 8{,}16$

↕1.) $d_{11} = 4{,}08$ ↕2.) $d_{12} = 5$ Haben Sie bei diesen 2 Aufgaben gerechnet ?

↕3.) Je nachdem.

⇆1.) $d_{14} = 5$ ⇆2.) $d_{15} = 3{,}5355$ oder $d_{15} = 5$, je nachdem.

⇆3.) $d_{16} = 2{,}04$ ⇆4.) $d_{17} = 3{,}5355$

⇅.) vgl. http://www.joerg-lehnen.de/Mathematik/BOS2007Vorschlag1.pdf und http://www.joerg-lehnen.de/Mathematik/BOS2007Vorschlag1Loeser.pdf, Aufgabe 3.5

↳.) Ich weiß es nicht. Bitte stellen Sie mir Ihre Lösung vor.

↶.) Es steht in ↑2.) ↷.) $O = 86{,}60$ ↺.) $V = \frac{125}{3}$

⮌.) vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Tetraeder#Winkel